

Balajti Zsuzsanna: A Monge elmélet elemzése és mérnöki alkalmazása, In: Csibi Vencel-József (szerk.), OGET 2016: XXIV. Nemzetközi Gépészeti Találkozó = 24th International Conference on Mechanical Engineering. 516 p. Konferencia helye, ideje: Déva, Románia, 2016.04.21-2016.04.24. Kolozsvár: Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság (EMT), 2016. pp. 13-17. (24.)

# A MONGE ELMÉLET ELEMZÉSE ÉS MÉRNÖKI ALKALMAZÁSA

## THE MONGE THEOREM ANALYSIS AND ITS ENGINEERING APPLICATION

*Dr. BALAJTI Zsuzsanna PhD,  
egyetemi docens, ME rektorhelyettes*

Miskolci Egyetem, Magyarország, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, Ábrázoló Geometriai Tanszék  
balajtizs@uni-miskolc.hu

### **Abstract**

*The present paper describes the theoretical analysis of the reconstruction of the Monge theorem. The significance of the analysis is that we consider those Monge-projections the same, which can be translated to one another by parallel shifting. Accordingly, in a fixed Descartes coordinate system in the space every Monge-projection is determined by its two projection lines that go through the origin point, which is described by three free parameters. The three free parameters make up the points of the Monge-cuboid. We are looking for bijective Monge-projections to a fixed third-grade spatial curve, in which the reconstruction of the curve can be carried out only with two pictures without any further information. This surface is described in this article. We have proved the engineering application of this theorem by calculating the correct camera position for the wearing examination of the hob's cutting edge.*

### **Összefoglaló**

*A jelen írás a Monge ábrázolás rekonstruálhatóságának elméleti elemzésének ismertetéséről szól. Az elemzés lényege, hogy a párhuzamos eltolással egymásba transzformálható Monge-projekciókat azonosnak tekintjük. Így a tér egy rögzített Descartes koordináta rendszerében minden Monge-projekciót meghatároz az origón átmenő két vetítősugara, melyeket három szabad paraméter ír le. A három szabad paraméterek alkotják a Monge-tégla pontjait. Egy rögzített harmadrendű térgörbéhez megkeressük azokat a bijektív Monge-projekciókat, melyekben a rekonstrukció csupán a görbe két képéből elvégezhető. Mindennek mérnöki alkalmazását igazoltam a lefejtő-maró vágóélének kopásvizsgálatához számítandó helyes kameraállás meghatározásával.*

### **Kulcsszavak**

Monge-projekció, Monge-tégla, rekonstruálhatóság, kopásvizsgálat, lefejtő-maró vágóél.

## **1. BEVEZETÉS**

A térbeli alakzatok modellezésére itt ismertetett elméleti elemzés a csupán két képből történő rekonstruálhatóság biztosítása céljából készült a méretváltozás vizsgálatára komplex geometriai eszközök alkalmazásával. Amíg a pont Monge ábrázolása bijektív leképezés, azaz a teret kölcsönösen egyértelműen képezi le a síkra, addig egyéb geometriai alapelemekre ez nem, illetve nem mindig teljesül. A Monge ábrázolás során az ábrázoló geometria gyakorlatából fakadóan a műszaki ábrázolásban a bijektivitást illetően anomáliák léptek fel [4,5]. A gyakorlati ábrázoló geometria bijektivitásra vonatkozó nemegyértelműségek oka Monge beállítottságára vezethető vissza, aki a poliéderek ábrázolását szintetikus úton végezte, viszont a görbék ábrázolását analitikus geometriai feladatként ragadta meg. Később azonban a Monge ábrázolás analitikus geometriai

vonatkozásai elhalványultak, a gyakorlat kizárólagosan szintetikus módszerekre tért át, mely a bijektivitást nem minden esetben tudta biztosítani.

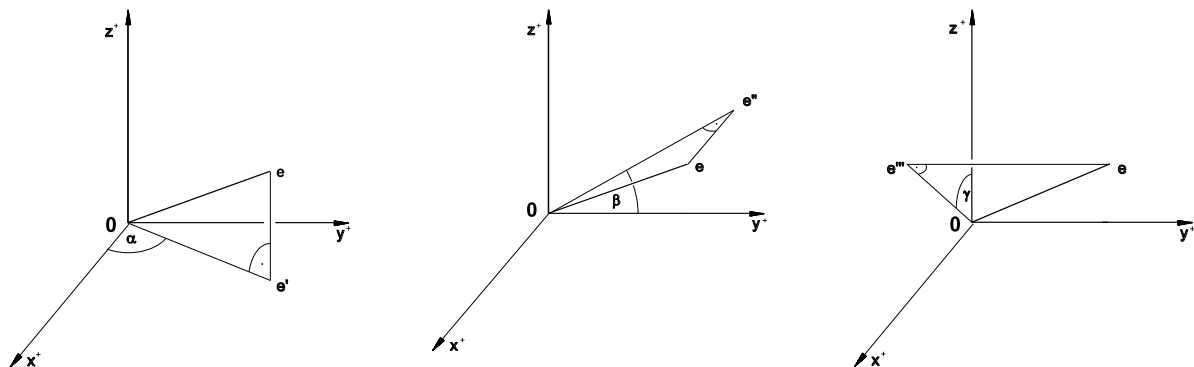
A műszaki gyakorlatban azonban gyakran előforduló feladat, hogy a munkadarabokat, alkatrészeket két darab kétdimenziós képükből kell rekonstruálni [5,6,7]. A Monge ábrázolás sajátossága, hogy a bijektivitáshoz poliéderek esetén, amennyiben csúcspontjaik jelölve vannak, két egymásra merőleges vetület elegendő. A megfeleltetett pontokkal ábrázolt testek modellezhetők a különböző CAD rendszerekben [6]. Amennyiben a geometriai alakzatról, a felületeket határoló görbéről csak két merőleges vetület áll rendelkezésünkre, és pontok nincsenek megfeleltetve rajta, a rekonstrukció sok esetben nem lehetséges, a leképezés igen gyakran nem bijektív [5,7].

A bijektív Monge ábrázolások vetítősugarainak irányából a CCD kamerákkal készített képekről rekonstruálható a lefejtőmaró vágóélgörbéje kopásvizsgálat céljára a csigakerék befejező megmunkálása esetén. A magas precizitású megmunkálás szükséges a megkívánt jó hatásfok, az alacsony zajszint megvalósításához [2].

## 2. A LEKÉPEZÉS

### 2.1. Az irányszögek

Egy rögzített Descartes koordináta-rendszer  $O$  pontjára illeszkedő  $e$  egyenes első irányszöge legyen az a  $0 \leq \alpha \leq \pi$  szög, mellyel az  $x^+$  félegyenes az egyenes  $[xy]$  síkra eső  $e'$  merőleges vetületébe forgatható  $y^+$  irányába. Legyen  $\alpha=0$ , ha az egyenes egybeesik  $z$ -vel (1. ábra). Egy  $O$ -ra nem illeszkedő egyenes első irányszöge megegyezik a vele párhuzamos  $O$ -n átmenő egyenes első irányszögével.



1. ábra Az  $e$  egyenes  $\alpha$  első, a  $\beta$  második és a  $\gamma$  harmadik irányszöge

Hasonlóan definiálható az  $e$  egyenes  $\beta$  második és  $\gamma$  harmadik irányszöge a [7]-ben található és az 1. ábrán látható módon.

### 2.2 A Monge-projekciók leírása három szabad paraméterrel

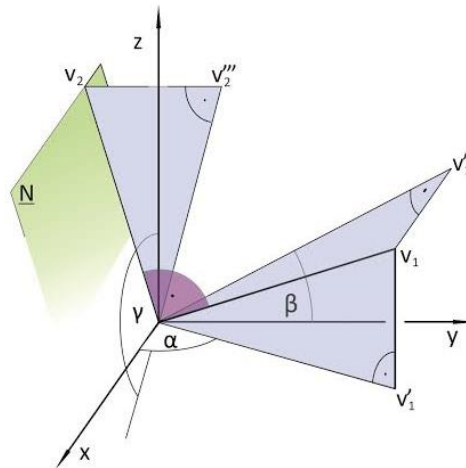
A  $\{K_1, K_2\}$  képsíkrendszert a hozzá a képsíkokra egyenként merőleges  $v_1, v_2$  vetítősugarakkal együtt egy Monge-projekciónak nevezzük. A párhuzamos eltolással egymásba transzformálható Monge-projekciók a rekonstruálhatóság vonatkozásában ugyanarra az eredményre vezetnek, a vizsgálatunk szempontjából azonosak, ezért a továbbiakban azonosnak tekintjük őket.

A további vizsgálódás megkönnyítésére rögzítsünk a térben egy  $O$  pontot, és megkívánjuk, hogy a Monge-projekciók képsíkjai, és vetítősugarai illeszkedjenek erre. Míg az  $x_{12}$  tengely, a két képsík metszévonalára 2 szabad paraméterrel, jellemezhető az  $O(x,y,z)$  Descartes koordináta-rendszerben, a képsíkok az  $x_{12}$  tengely körüli elforgatás lehetőségeiben egy szabad paraméterrel írhatók le. Következésképpen a Monge-projekciók a korábbi megszorítások mellett három szabad paraméterrel írhatók le.

Ezután minden egyes Monge-projekcióhoz rendeljünk hozzá egy öt egyértelműen meghatározó  $(\alpha, \beta, \gamma)$  számhármast a következő módon: egy rögzített  $O(x,y,z)$  Descartes koordináta-rendszerben a

Monge-projekció  $v_1$  első vetítősugarának első irányszöge  $\alpha$ , második irányszöge  $\beta$ , míg  $v_2$  második vetítősugarának harmadik irányszöge  $\gamma$ .

Az értelmezett  $(\alpha, \beta, \gamma)$  számhármak is meghatározzák a vetítősugarakat és magát a Monge-projekciót: a  $v_1$  első vetítősugár a  $v_1'$ -re illeszkedő első vetítősík és a  $v_1''$ -re illeszkedő második vetítősík metszésvonala. A  $v_2$  második vetítősugár a  $v_1$  első vetítősugárra merőleges  $\underline{N}$  normálsík és a  $v_2'''$ -re illeszkedő harmadik vetítősík metszésvonala (2. ábra).



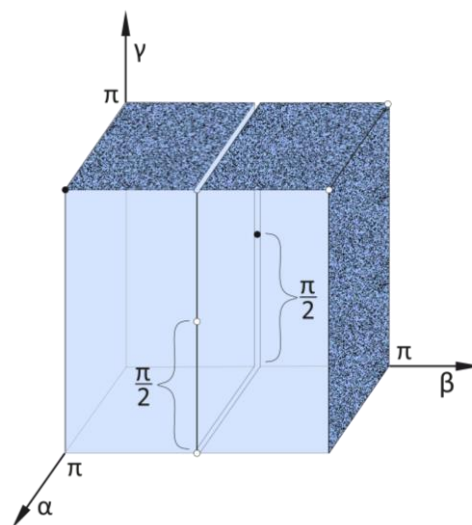
2. ábra A Monge-projekció  $v_1, v_2$  vetítősugara és az  $(\alpha, \beta, \gamma)$  szöghármas közötti kapcsolat

A Monge-projekció  $v_1$  első vetítősugarát az első és második képsíkszögének ismeretében nem lehet visszaállítani, ha a  $\underline{V}_1$  és  $\underline{V}_2$  síkok, illetve a  $\underline{V}_3$  és  $\underline{N}$  síkok egybeesnek. Ha azonban a  $v_1 \in [zx]$ , és a  $v_2 \in [zx]$  is teljesül, akkor a  $v_2$  harmadik irányszögének ismeretében a  $v_1$  visszaállítható.

Azon Monge-projekciók kivételével, melyek  $v_1, v_2$  vetítősugaraiból  $v_1 \in [zx]$  és  $v_2 \in [zx]$  feltételeket, minden Monge-projekcióhoz egyértelműen hozzárendeltünk egy öt egyértelműen meghatározó  $(\alpha, \beta, \gamma)$  számhármast (2. ábra). Nem minden Monge-projekció, de minden rendezett két kép tárgyalásra került, ami a vizsgálatunk tekintetében helytálló, ugyanis a bijektivitás vizsgálata egy adott görbére nézve ugyanazt az eredményt adja, ha az első és második képet fölcseréljük.

### 2.3 A Monge-tégla

Az  $\alpha, \beta, \gamma$  értékeknek azon részhalmaza a  $[0, \pi]$  intervallumon, amelyhez egyértelműen tartozik egy Monge-projekció az  $O(\alpha, \beta, \gamma)$  Descartes koordináta-rendszerben a Monge-tégla pontjai (3. ábra).



3. ábra A Monge-tégla belső és felületi pontjai

A Monge –tégla belső pontjai a következő feltételeket elégítik ki:

$$0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi/2, \pi/2 < \beta < \pi, 0 < \gamma < \pi. \quad (1)$$

A Monge-tégla felületi pontjai a következő feltételeket elégítik ki:

- $0 < \alpha < \pi, \beta = \pi, 0 < \gamma < \pi,$
  - $0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi/2, \pi/2 < \beta < \pi, \gamma = \pi,$
  - $\alpha = \pi, \beta = \pi/2, 0 < \gamma < \pi/2, \pi/2 < \gamma < \pi,$
  - $\alpha = 0, \beta = \pi/2, \gamma = \pi/2$
  - $\alpha = \pi, \beta = 0, \gamma = \pi.$
- (2)

Létrehoztunk a Monge-projekciók és a Monge- tégla pontjai között egy matematikai leképezést, mely kölcsönösen egyértelmű leképezés.

### 3. A GÖRBÉK MONGE ÁBRÁZOLÁSÁNAK BIJEKTIVITÁSA

A Descartes koordinátasíkok illeszkedjenek a Monge-rendszer képsíkjaire úgy, hogy  $[xy] \equiv \underline{K}_1$  és  $[yz] \equiv \underline{K}_2$ , ekkor  $y = x_{12}$  tengely.

1.Tétel: Ha a  $g$  görbe  $g'$  és  $g''$  képgörbéi külön-külön felírhatók az  $y \rightarrow f_1(y)$  és  $y \rightarrow f_2(y)$  függvényekkel a képsíkok megfelelő Descartes koordinátasíkokban, ahol  $x = f_1(y)$  és  $z = f_2(y)$ , azaz pontjai  $P(f_1(y), y, f_2(y))$  koordinátájúak, akkor a  $g$  görbe bármely darabja egyértelműen rekonstruálható képeiből.

2.Tétel: Ha a  $g$  görbe  $g'$  és  $g''$  képgörbéi a megfelelő Descartes koordinátasíkokban nem írhatók fel  $x = f_1(y)$  és  $z = f_2(y)$  függvényként, azaz az  $y \rightarrow f_1(y)$  és  $y \rightarrow f_2(y)$  hozzárendelések nem függvények, akkor  $g$ -nek van olyan darabja, amely csupán két képéből egyértelműen nem rekonstruálható.

3. Tétel: Ha egy görbének nincs profil irányú érintője, akkor bármely daraja egyértelműen rekonstruálható két képéből.

Az 1.-3. Tételek bizonyítása a [7] szerint végzendők el.

### 4. A HARMADRENDŰ TÉRGÖBE REKONSTRUÁLHATÓSÁGA

A Bézier-görbe illeszkedjen az  $u_0, u_1, u_2, u_3$ , paraméterű  $p_0, p_1, p_2, p_3$  pontokra, ahol  $u_i \neq u_j, i \neq j$ , és  $u_0 = 0, u_3 = 1$ .

A Bézier-görbe  $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$  kontrollpontjaira teljesül a  $\underline{b}(u_i) = p_i$  ( $i=0, \dots, 3$ ) feltétel. (3)

A Bézier-görbe egyenlete

$$\underline{b}(u) = \sum_{j=0}^n B_j^n(u) \underline{b}_j, \text{ ahol } B_j^n(u) = \binom{n}{j} u^j (1-u)^{n-j}. \quad (4)$$

Az  $u_i \neq u_j$  feltétel a  $\underline{b}_i$  -re nézve (3)-(4) egy egyértelmű megoldást eredményez számunkra.

A Bézier-görbe és az Hermite-ív közötti kapcsolat a következő formában írható fel:

$$p_0 = \underline{b}_0, t_0 = 3 \cdot \underline{b}_1 - 3 \cdot \underline{b}_0, p_3 = \underline{b}_3, t_3 = 3 \cdot \underline{b}_3 - 3 \cdot \underline{b}_2, \quad (5)$$

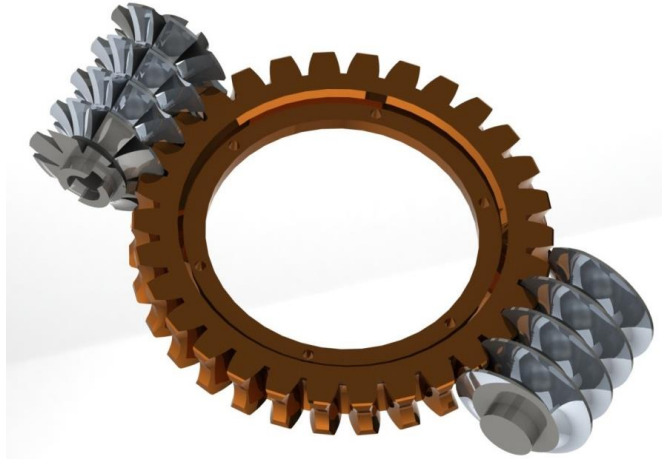
ahol  $p_0, p_3$  a kezdő- és végpontok, a  $t_0, t_3$  a kezd-ő és végérintők.

Az Hermite-ívhez tartozó Monge-tégla bijektív tartománya az [7]-ben meghatározásra került, így az (5) alapján a harmadrendű interpolációs Bezier-görbe bijektív ábrázolásához szükséges vetítési irányokat is ismerjük.

### 5. MÉRNÖKI ALKALMAZÁS

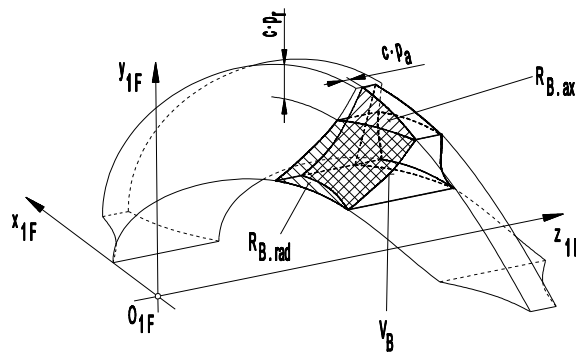
A Miskolci Egyetem Gépgyártástechnológiai Tanszékén működő kutatócsoport, „Csigaiskola” egyik legfontosabb kutatási területe az ívelt profilú csigahatópárok gyártásgeometriájának fejlesztése [2,6,7]. A csigakutatás egyik kiemelkedő témája a tengelymetszetben körív profilú hengeres csiga (4. ábra). A csigakerék simító megmunkálásához alkalmazott lefejtőmaró burkolófelülete megegyezik a kerékkel kapcsolódó csigáéval (közvetlen mozgás leképezés) [1,2,6].

Mivel a lefejtőmarók bonyolult geometriájú [3], drága szerszámok, célszerű lehetővé tenni a minél többszöri újraélezés lehetőségét (5. ábra).



4. ábra A tengelymetszetben körív profilú csigahajtás lefejtő-maróval [7]

A lefejtő maró fog V vágóéle az  $R_B$ ,  $R_J$  hátra-munkált oldalfelületek és a  $H$  homlokfelület metszése. A hátramunkálást és a homlokfelületek megmunkálási technológiáját úgy kell megvalósítani, hogy az így kapott él rajta legyen a helyettesítő csiga fogfelületén ( $J$ ,  $B$ ), ami geometriailag azonos a valós csiga fogfelületével. (8. ábra).



5. ábra A lefejtőmaró vágóéle a  $K_{F1}$  forgó koordináta-rendszerben [2]

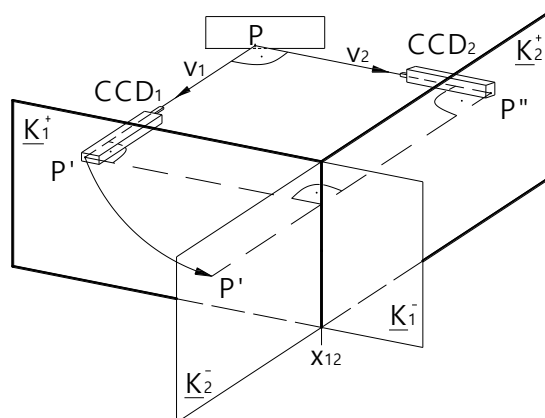
A V vágóél egyenlete

$$\left. \begin{aligned} x_v &= -\eta \cdot \sin \frac{\sqrt{\rho_{ax}^2 - (K - \eta)^2} - z_{ax}}{p + p_h} \\ y_v &= \eta \cdot \cos \frac{\sqrt{\rho_{ax}^2 - (K - \eta)^2} - z_{ax}}{p + p_h} \\ z_v &= -p_h \cdot \frac{\sqrt{\rho_{ax}^2 - (K - \eta)^2} - z_{ax}}{p + p_h} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ahol ( $\eta$ ) a csavarfelület belső paramétere,  $p$  a csavarfelület,  $p_h$  a homlokfelület emelkedési paramétere,  $\rho_{ax}$  a fogprofil sugara,  $K$  a csigaorsó tengelyvonalának és a profilkör középpontjának a távolsága a [2] szerint.

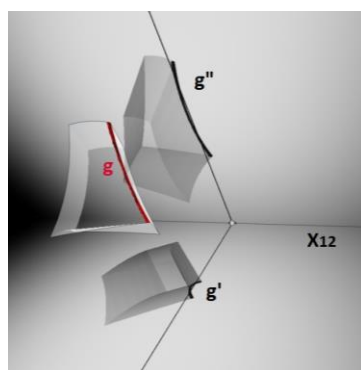
A vágóélen a  $p_0$  és  $p_3$  pontokat a fej- és lábhengeren, illetve a  $p_1$  és  $p_2$  pontokat közöttük arányosan jelöljük ki. A pontokhoz az ívhossz szerinti paraméterezést közelítő húrhosszal arányos paraméterezés került bevezetésre [7]. Kutatómunkánk során igazolást nyert, hogy a harmadrendű interpoláló Bézier-görbe a vágóélnak a szokásosan megadott tőrésen belüli közelítését adja [6], ezért a  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  pontokra ezt illesztettük.

A **4. fejezet** szerint a Monge-tégla bijektív tartományából kiválasztott  $(\alpha, \beta, \gamma)$  irányszögek a CCD kamerák helyes pozícióját adják a lefejtő-maró vágóélinek kopásvizsgálatához (6. ábra).

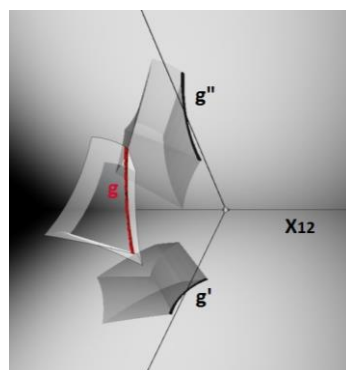


6. ábra A CCD kamerákkal készített képek és a Monge ábrázolás kapcsolata

A vágóél görbéjének vizsgálata nem végezhető el a két kamerával, ha az él bármely darabja egyértelműen nem rekonstruálható két képéből (7. ábra). A CCD kamerák helyes lokalizálása szükséges és elégséges feltétele a lefejtőmaró vágóél vizsgálatának úgy, hogy a görbe bármely darabja csupán két képéből rekonstruálható legyen (8. ábra).



7.ábra A vágóél nem rekonstruálható képeiből



8.ábra A vágóél rekonstruálható képeiből

Ezzel az eljárással megadtuk a lehetőségét a szerszám vágóél kopás méretváltozásának folyamatos ellenőrzésére a gyártás során.

## 6. ÖSSZEGZÉS

A kutatómunkában kifejlesztett eljárás lehetőséget ad a lefejtő-maró vágóélével történő megmunkálás során a visszacsatolásra, a vágóél kopásának folyamatos megfigyelésére az újra-élezés meghatározása céljából CCD kamerák alkalmazásával. A beállított kamerákkal a maró pozicionálását és jellegzetes kopásának mértékét folyamatosan ellenőrizzük.

### HIVATKOZÁSOK:

- [1] **CSIBI V. J.:** *Contribution To Numerical Generation Of Helical Gearing With Any Profiles*, Kolzsvár, PhD Disszertáció, 1990., p. 215
- [2] **DUDÁS I.:** *The Theory & Practice of Worm Gear Drives*, Kogan Page US, Sterling, USA, ISBN 1 9039 96619 9, 2004., p. 320
- [3] **GYENGE CS.:** Lefejtőmarók oldalhátszögeinek pontos meghatározása és optimalása, 1996, GÉP 48:(10) pp. 38-40.
- [4] **MONGE G.:** *Géometrie descriptive. Lecon données aux Ecoles normales, l'an 3 de la République*, Paris, Baudouin, an VII., ISBN : 978-2-87647-065-1, p. 142
- [5] **PETRICH, G.:** *Ábrázoló geometria*, Budapest, 1973., 413 o.
- [6] **ÓVÁRINÉ DR. BALAJTI, ZSUZSANNA:** *Kinematikai hajtópárok gyártásgeometriájának fejlesztése*, PhD disszertáció, Miskolc, 2007., 181 o.
- [7] **ÓVÁRINÉ BALAJTI, Zs.:** *A Monge ábrázolás elméleti elemzése és alkalmazása a mérnöki gyakorlatban*, Miskolc, 2015., ISBN: 978-963-358-097-4, 101 o.