

IMPROPRIUS INTEGRÁLOK NUMERIKUS KISZÁMÍTÁSA

BARANYI LÁSZLÓ

Miskolc

Ebben a dolgozatban egy módszert ismertetünk, amellyel a véges intervallumra vonatkozó improprius integrál értéke tetszőleges pontossággal közelíthető.

1. Bevezetés

Az improprius integrálok kiszámítására többféle módszert dolgoztak ki. Az egyik legismertebb a *Gauss-féle kvadratura* [2]. E módszer hátránya, hogy nehezen gépesíthető; alkalmazásakor szembetalálkozhatunk azokkal a problémákkal, hogyan válasszuk meg a súlyfüggvényt, a vizsgált intervallumon erre ortogonális polinomokat, és hogy hogyan határozzuk meg ezek zérushelyeit. Egy másik kiszámítási mód az, hogy a pólus kis környezetében elhanyagoljuk az integrál értékét. Ennek hátránya, hogy adott pontosság eléréséhez általában „igen közel kell menni” a pólushoz, s az ottani nagy derivált értékek miatt a konvergencia lassú.

Ebben a dolgozatban (s ennek [1] előzményében) egy egyszerű, jól gépesíthető módszert mutatunk be, amellyel egy alsó és egy felső korlátot tudunk adni az improprius integrál értékére, amelyek tetszőleges mértékben közelíthetők egymáshoz.

2. Az improprius integrál számítása

Tekintsük az

$$(2.1) \quad I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b}, \quad 0 < b < 1$$

integrált, ahol az $(x_1, x_2]$ számközben $f(x) > 0$, $f(x_1) = 0$, az f függvény folytonos $[x_1, x_2]$ -ben, $f'(x_1)$ létezik és $\neq 0$. Az ilyen típusú integrálokra a következőt bizonyítjuk.

2.1. SEGÉDTÉTEL. Ha van egy olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy az $(x_1, x_1 + \varepsilon)$ intervallumon $f''(x)$ létezik és $f''(x) \neq 0$, akkor a (2.1) integrál az alábbi módon becsülhető:

$$R_1(\varepsilon) + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b} > I > R_2(\varepsilon) + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b},$$

ha $f''(x) > 0$, $x \in (x_1, x_1 + \varepsilon)$;

$$R_1(\varepsilon) + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b} < I < R_2(\varepsilon) + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b},$$

ha $f''(x) < 0$, $x \in (x_1, x_1 + \varepsilon)$,

ahol

$$(2.2) \quad R_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{1-b}}{(1-b)[f'(x_1)]^b},$$

$$(2.3) \quad R_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{(1-b)[f(x_1 + \varepsilon)]^b}.$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő függvényeket:

$$(2.4) \quad f_1(x) = \begin{cases} f'(x_1)(x - x_1), & \text{ha } x_1 \leq x \leq x_1 + \varepsilon \\ f(x), & \text{ha } x_1 + \varepsilon < x \leq x_2 \end{cases}$$

$$(2.5) \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{f(x_1 + \varepsilon)}{\varepsilon}(x - x_1), & \text{ha } x_1 \leq x \leq x_1 + \varepsilon \\ f(x), & \text{ha } x_1 + \varepsilon < x \leq x_2. \end{cases}$$

Látható, hogy (2.4)-ben az érintőjével, (2.5)-ben a húrával helyettesítettük az $f(x)$ függvényt az $[x_1, x_1 + \varepsilon]$ zárt intervallumon. A (2.1)–(2.5) kifejezések alapján írhatjuk:

$$(2.6) \quad I_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{[f_1(x)]^b} = R_1(\varepsilon) + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b},$$

$$(2.7) \quad I_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{[f_2(x)]^b} = R_2(\varepsilon) + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b}.$$

A második deriváltakra tett feltevés következtében az $f_1(x)$, $f_2(x)$ függvények egyike majorálja, másika pedig minorálja az $f(x)$ függvényt az $(x_1, x_1 + \varepsilon)$ intervallumon, így a (2.6), (2.7) integrálok egyike alsó, másika pedig felső korlátja a (2.1) integrálnak. Könnyen belátható, hogy

$$I_1 > I > I_2; \quad \text{ha } f''(x) > 0, \quad x \in (x_1, x_1 + \varepsilon)$$

és

$$I_1 < I < I_2; \quad \text{ha } f''(x) < 0, \quad x \in (x_1, x_1 + \varepsilon).$$

Ha a (2.7) integrálból kivonjuk a (2.6) összefüggés által meghatározott integrált, akkor a következőt kapjuk:

$$I_2 - I_1 = R_2(\varepsilon) - R_1(\varepsilon).$$

Ez a különbség alkalmasan megválasztott ε érték esetén tetszőlegesen kicsivé tehető, mert egyrészt a második tag $0 < b < 1$ miatt zérus határértékű, másrészt

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (I_2 - I_1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_2(\varepsilon) = \frac{1}{1-b} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{[f(x_1 + \varepsilon)]^b} = \\ &= \frac{1}{1-b} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\varepsilon}{f(x_1 + \varepsilon) - f(x_1)} [f(x_1 + \varepsilon)]^{1-b} \right\} = \\ &= \frac{1}{1-b} \frac{1}{f'(x_1)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(x_1 + \varepsilon)]^{1-b} = 0.\end{aligned}$$

Ez utóbbi határérték zérus volta a segédétel feltételeiből nyilvánvaló, mert az $f(x)$ függvény az $x = x_1$ helyen folytonos is.

Ezzel a segédételt bizonyítottuk.

2.1. Megjegyzés. A (2.1) integrált a (2.6) és (2.7) integrálok számtani közepével közelítve az $E(\varepsilon)$ hibakorlát

$$(2.8) \quad E(\varepsilon) = \frac{1}{2} |R_2(\varepsilon) - R_1(\varepsilon)|,$$

azaz

$$\left| I - \frac{I_1 + I_2}{2} \right| < E(\varepsilon).$$

2.2. Megjegyzés. A 2.1. segédétel egyszerűen kiterjeszthető arra az esetre is, amikor az $f(x)$ függvény zérushelye $x = x_2$. Itt eddig olyan integrálokat vizsgáltunk, amelyeknél az integrandus pólusa az intervallum valamely végpontjában volt. Amennyiben a pólus az intervallum belsejében van, akkor az integrál felosztható két — az előzőekben már tárgyalt — esetre.

2.3. Megjegyzés. Amennyiben az $(x_1, x_1 + \varepsilon)$ intervallumon $f''(x) \equiv 0$, egyébként pedig az $f(x)$ függvényre teljesülnek a 2.1. segédétel előtt megfogalmazott feltételek, akkor azt kapjuk, hogy

$$I = R_1(\varepsilon) + \int_{x_1 + \varepsilon}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b},$$

mivel a fent említett intervallumon az $f(x)$ függvény, a húrja és érintője egybeesik.

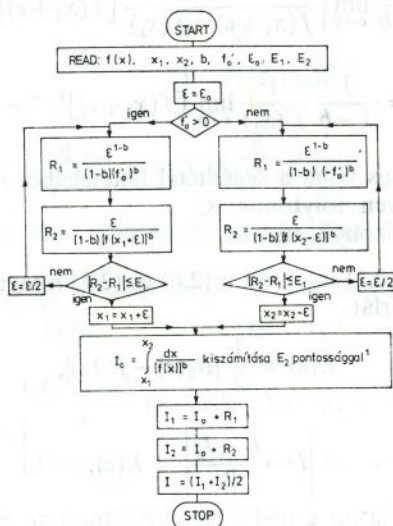
3. Numerikus példák

Az improprius integrálok numerikus számítására készítettünk egy számítógépes programot FORTRAN programozási nyelven. Az alábbiakban röviden bemutatjuk, hogyan kell a program INPUT adatait előkészíteni; ismertetjük továbbá a program vázlatos működését, majd közlünk néhány konkrét számpéldát.

Az INPUT adatok előkészítése

- Az $f'(x_0)=f'_0$ derivált kiszámítása az $f(x)$ zérushelyénél ($x_0=x_1$ vagy x_2).
- A megkívánt pontosságnak megfelelő E_1 , E_2 hibakorlátok felvétele (l. a folyamatábrát).
- Az ε kezdeti, ε_0 értékének megválasztása.

A vázlatos folyamatábra



1. ábra

Néhány példa

Az alábbiakban bemutatjuk néhány improprius integrál közelítő értékét, E hibakorlátját s a hozzá tartozó ε , valamint $R_1(\varepsilon)$ értékeket. Érdeemes megjegyezni, hogy amennyiben a (2.1) integrál értékét az $(x_1 + \varepsilon, x_2)$ intervallumon számított integrállal közelítenénk, akkor az elkövetett hiba közelítőleg az itt leírt $R_1(\varepsilon)$ értékével lenne azonos.

$$a) \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \cong 2,622\,057\,55$$

$$E = 5 \cdot 10^{-9}$$

$$\varepsilon = 6,25 \cdot 10^{-4}$$

$$R_1(\varepsilon) = 4,999\,999\,999\,9 \cdot 10^{-2}$$

¹ L. a 3.1. megjegyzést.

b)

$$I = \int_0^{0,5} \frac{4x dx}{\sqrt{1-4x^2}} \cong 1,000\,000\,0$$

$$E = 5 \cdot 10^{-8}$$

$$\varepsilon = 5,5 \cdot 10^{-6}$$

$$R_1(\varepsilon) = 4,690\,415\,759\,9 \cdot 10^{-3}$$

A pontos megoldás: $I=1$.

c)

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(\operatorname{sh} x)^{0,7}} \cong 3,284\,952\,535$$

$$E = 3 \cdot 10^{-9}$$

$$\varepsilon = 1,25 \cdot 10^{-4}$$

$$R_1(\varepsilon) = 0,224\,880\,474\,60$$

d) Összenyomható közeg kiáramlása tartályból; kifolyási idő.

$$I = \int_1^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{5(x^{0,4}-1)}} \cong 1,102\,932\,4,$$

ahol

$$x_2 = 1,577\,440\,966$$

$$E = 5 \cdot 10^{-8}$$

$$\varepsilon = 3,125 \cdot 10^{-5}$$

$$R_1(\varepsilon) = 7,905\,694\,150\,5 \cdot 10^{-3}$$

A pontos megoldás:

$$I = \frac{\sqrt{5}}{8} [x_2^{0,2}(3+2x_2^{0,4})\sqrt{x_2^{0,4}-1} + 3\operatorname{arsh}(\sqrt{x_2^{0,4}-1})] \cong 1,102\,932\,428.$$

e) Összenyomhatatlan folyadék kifolyása tartályból; kifolyási idő.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{30}{7}x(1-x^{14})}} \cong 1,013\,105$$

$$E = 5 \cdot 10^{-7}$$

$$\varepsilon_b = 0,3$$

(ε a bal oldali pólusnál)

$$R_{1b}(\varepsilon_b) = 0,529\,150\,262\,2$$

(A bal oldali pólusra vonatkozó $R_1(\varepsilon)$)

$$\varepsilon_j = 8 \cdot 10^{-5}$$

(ε a jobb oldali pólusnál)

$$R_{1j}(\varepsilon_j) = 2,309\,401\,1 \cdot 10^{-3}$$

(A jobb oldali pólusra vonatkozó $R_1(\varepsilon)$)

3.1. *Megjegyzés.* Az I_0 integrált úgy számítjuk, hogy az integrálási intervallumot több, a pólustól távolodva növekvő hosszúságú részintervallumra osztjuk, s ezeken az integrálást a *Romberg-féle közelítő integrációs módszerrel* végezzük. Jelenleg mindössze három részintervallum van; ezek hosszát az integrandust tekintetbe véve célszerűen a következő módon választottuk: 10ε ; $0,01(x_2 - x_1 - 11\varepsilon)$; $0,99(x_2 - x_1 - 11\varepsilon)$. A részintervallumok számának növelésével az adott pontosság eléréséhez szükséges számítási munka csökkenthető.

Végül megköszönöm KIS OTTÓ és VINCZE ENDRE professzoroknak a dolgozat megírásához adott igen értékes tanácsaikat.

IRODALOM

- [1] BARANYI, L., "Approximate calculation of improper integrals", *Publ. Techn. Univ. Heavy Industry, Miskolc, Series D. Natural Sciences* 35 (1982) 39—42.
- [2] RALSTON, A., *A First Course in Numerical Analysis* (McGraw-Hill, New York, 1965).

(Beérkezett: 1982. június 10.)

BARANYI LÁSZLÓ
NME ÁRAMLÁS- ÉS HŐTECHNIKAI GÉPEK TANSZÉKE
3515 MISKOLC-EGYETEMVÁROS

NUMERICAL EVALUATION OF IMPROPER INTEGRALS

L. BARANYI

In this paper a method is shown for the computation of improper integrals over a finite interval.